Chủ đề:

TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG CÔNG THỨC NEWTON–LEIBNITZ

o0O0o

A. CẦN NHỚ:

Tích phân là gì ?

- ✓ Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K và $a,\ b \in K$.
- ✓ Gọi $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ trên K.
- ✓ Hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là **tích phân** của $f(x)$ từ a đến b và được kí hiệu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. (a gọi là cận dưới, b gọi là cận trên).
- ✓ Như vậy $$\boxed{I=\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)} \quad (1)$$

Lưu ý

- ✓ (1) còn được gọi là công thức Newton–Leibnitz.
- ✓ Để tính được giá trị của tích phân, trước tiên ta cần **tìm được nguyên hàm** của hàm số dưới dấu tích phân, sau đó **thay cận vào công thức** và **tính ra kết quả**.
- ✓ Giá trị của tích phân không phụ thuộc vào biến số, nghĩa là ta có thể viết

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=\int_a^b f(v)dv\cdots$$

Tính chất của tích phân

- ❋ $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0.$
- ❋ $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- ❋ $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$ với $k\in\mathbb{R}.$
- ❋ $\int_a^b \big[f(x)\pm g(x)\big]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$
- ❋ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\boldsymbol{c}} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\boldsymbol{c}}^b f(x)\mathrm{d}x.$
- ❋ $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a).$

TỔ TOÁN/THPT NMK/TPHCM

B. BÀI TẬP MẪU:

Bài 1: Tính

a) $I=\int_{-1}^{2}\left(3x^2-4x+5\right)dx=\left(x^3-2x^2+5x\right)\Big|_{-1}^{2}=\left[2^3-2.2^2+5.2\right]-\left[(-1)^3-2.(-1)^2+5.(-1)\right]=18.$

***Nhận xét:** Đây là bài tập dạng đơn giản, HS chỉ cần tính nguyên hàm và áp dụng (1) là xong.*

b) $I=\int_{1}^{2}\frac{(x+2)^2.(5x-1)}{2x^2}dx=\int_{1}^{2}\left(\frac{5}{2}x+\frac{19}{2}+\frac{8}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx=\left(\frac{5}{4}x^2+\frac{19}{2}x+8\ln|x|+\frac{2}{x}\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{49}{4}+8\ln 2.$

***Nhận xét:** HS chưa tính ngay được nguyên hàm. Công việc cần làm trước tiên là khai triển tử số & chia cho mẫu số, rút gọn và tính tương tự câu a).*

c) $I=\int_{-2}^{3}\frac{1}{x^2-16}dx=\int_{-2}^{3}\frac{1}{(x+4)(x-4)}dx=\frac{1}{8}\int_{-2}^{3}\left[\frac{(x+4)-(x-4)}{(x+4)(x-4)}\right]dx=\frac{1}{8}\int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+4}\right)dx$

$=\frac{1}{8}\left(\ln|x-4|-\ln|x+4|\right)\Big|_{-2}^{3}=\frac{-\ln 21}{8}.$

***Nhận xét:** Trước hết cần dùng hằng đẳng thức tách mẫu số thành tích 2 nhân tử bậc 1, sau đó biến đổi về dạng hiệu của 2 phân thức và giải tiếp. Lưu ý công thức nguyên hàm sau đây:*

$$\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C\,(a\neq 0).$$

d) $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(1+\tan^2 x\right)-1\right]dx=\left[(\tan x)-x\right]\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}.$

***Nhận xét:** Trong bài tập này, trước hết cần "liên tưởng" tới công thức nguyên hàm*

$\int\left(1+\tan^2 x\right)dx=\tan x+C$. *Từ đó dẫn đến việc thêm bớt số 1 và giải tiếp.*

e) $I=\int_{0}^{1}\left(e^x-4\right)^2dx=\int_{0}^{1}\left(e^{2x}-8.e^x+16\right)dx=\left(\frac{1}{2}e^{2x}-8.e^x+16x\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{2}e^2-8e+\frac{47}{2}.$

***Nhận xét:** Trước tiên dùng hằng đẳng thức để khai triển, sau đó dùng công thức nguyên hàm*

$$\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

TỔ TOÁN/THPT NTMK/TPHCM

Bài 2: Tính

a) $I = \int_1^4 |x-3|dx$

***Nhận xét:** Không thể tìm trực tiếp nguyên hàm của những hàm có dấu trị tuyệt đối. Vì vậy chúng ta sẽ xét dấu (x – 3) trên [1; 4] để "xóa" dấu trị tuyệt đối, sau đó dùng tính chất* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

✓ Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		3		4	$+\infty$
$x-3$			$-$		0	$+$		

✓ $I = \int_1^3 |x-3|dx + \int_3^4 |x-3|dx = -\int_1^3 (x-3)dx + \int_3^4 (x-3)dx = -\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\Big|_1^3 + \left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\Big|_3^4 = \frac{5}{2}.$

*(**Lưu ý rằng:** $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$)*

b) $I = \int_{-3}^2 |x^2+x-2|dx$

***Hướng dẫn:** Lập bảng xét dấu của $x^2 + x - 2$. Giải tương tự câu a). Đs:* $\frac{49}{6}$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ: Học sinh làm vào vở bài tập Giải tích những câu sau đây

- ✓ **Câu 2b).**
- ✓ **Bài 11, 12 trang 47 (Đề cương MK).**

Học sinh trao đổi thêm với GV Toán của lớp để được hướng dẫn cụ thể !

TỔ TOÁN/THPT NTMK/TPHCM